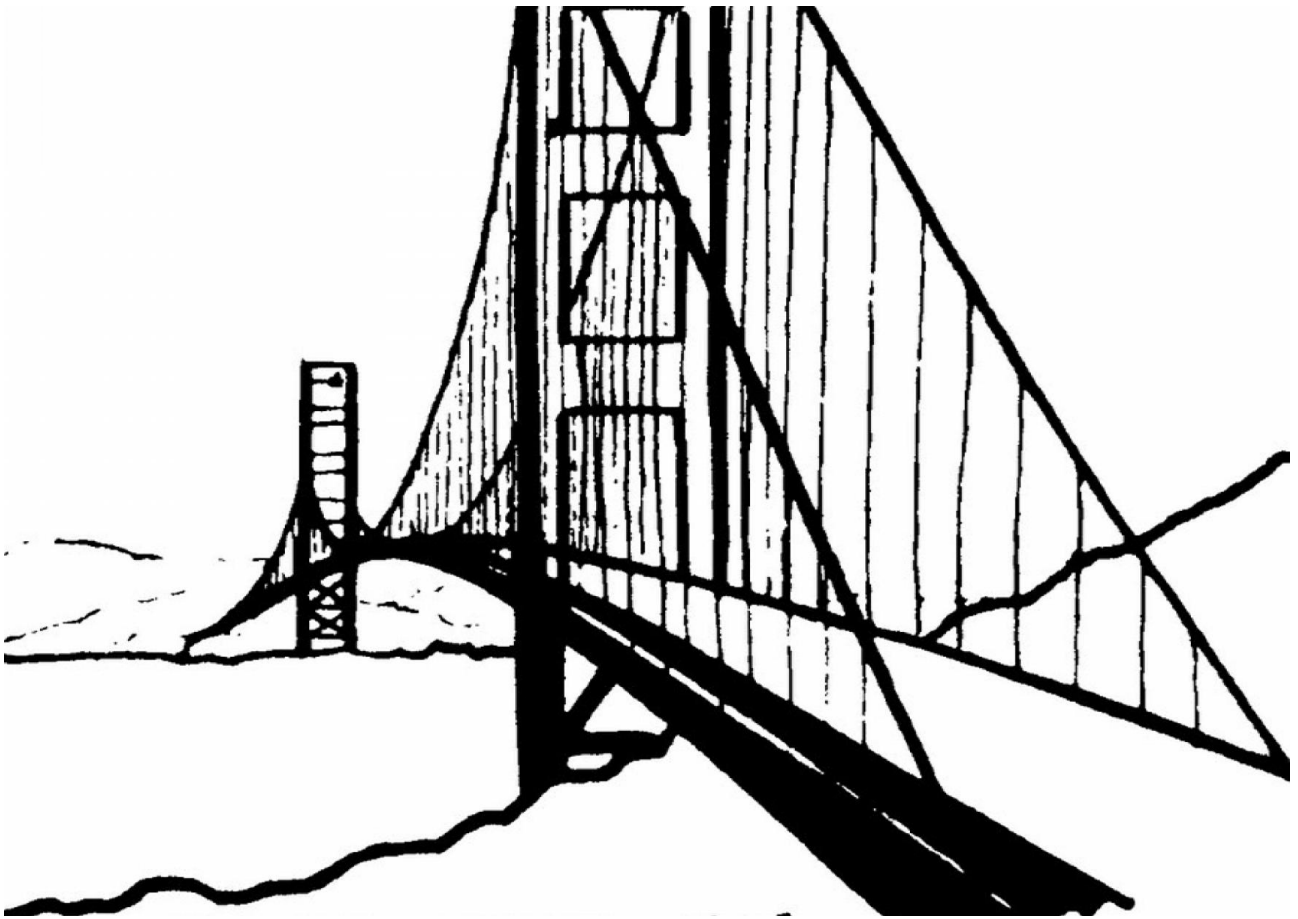


Zbirka seminarских nalog
Višja dinamika



Pripravila: Gregor Čepon
Martin Česnik

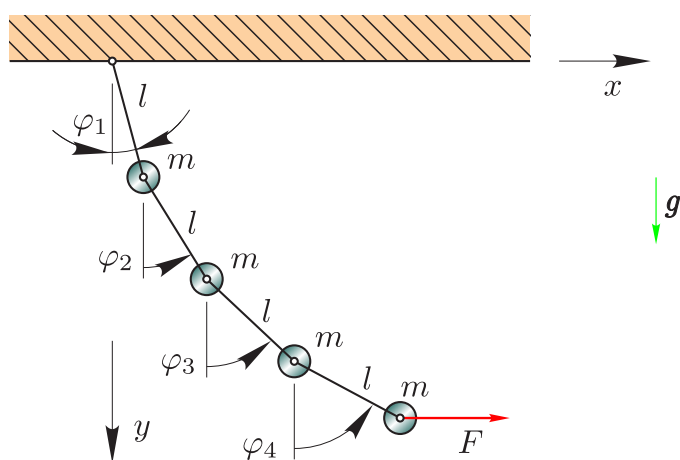
Naloga AnSt-01

Opazujete sistem štirih masnih točk m , ki so medsebojno povezane z brezmasnimi palicami dolžine l . Na zadnjo masno točko delujemo z vodoravno silo F . Predpostavite, da je sistem v statični ravnotežni legi.

1. Z uporabo zakonov analitične statike izpeljite posplošene sile sistema.
2. Določite kote $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ in φ_4 [rad] pri ravnotežni legi.
3. Uporabite takšen model za deformacijo vrvi dolžine $l_v = 4 \cdot l$ in mase $m_v = 4 \cdot m$, katero diskretizirate na n delov. Izračunajte koordinate nevpetega konca vrvi in narišite diskretizirano vrv v statični ravnotežni legi.

Podatki:

$$\begin{aligned}m &= 1 \text{ kg} \\l &= 0,2 \text{ m} \\F &= 25 \text{ N} \\g &= 9,81 \text{ m/s}^2 \\n &= 100\end{aligned}$$



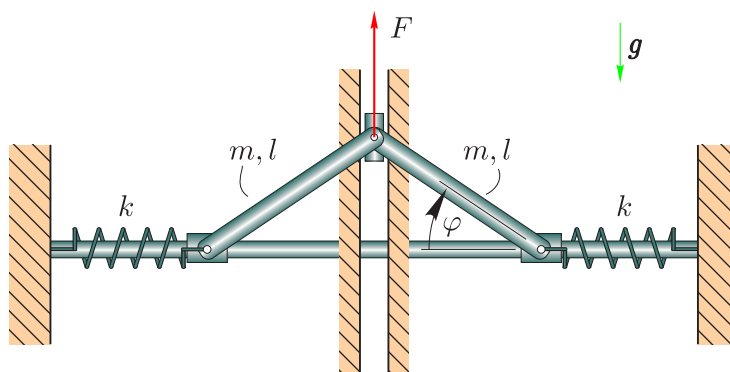
Naloga AnSt-02

Opazujete sistem dveh palic dolžin l in mas m , na kateri deluje sila F . Vzmeti togosti k sta neobremenjeni pri zasuku $\varphi = 0$, mase drsnikov zanemarite.

1. Določite posplošeno silo sistema.
2. Določite statično ravnotežno lego, če zunanja sila F ni prisotna.
3. Ob upoštevanju sile F izrišite posplošeno koordinato $\varphi(F)$, ko zunanja sila narašča od 0 do F_{\max} . Korak sile naj bo enak $F_{\max}/100$. Pri kateri vrednosti zunanje sile bo statično ravnotežje pri $\varphi = 0^\circ$ (primerjajte numerično in analitično vrednost ter komentirajte morebitno odstopanje)?

Podatki:

$$\begin{aligned}m &= 10 \text{ kg} \\l &= 0,5 \text{ m} \\k &= 1000 \text{ N/m} \\F_{\max} &= 1250 \text{ N} \\g &= 9,81 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

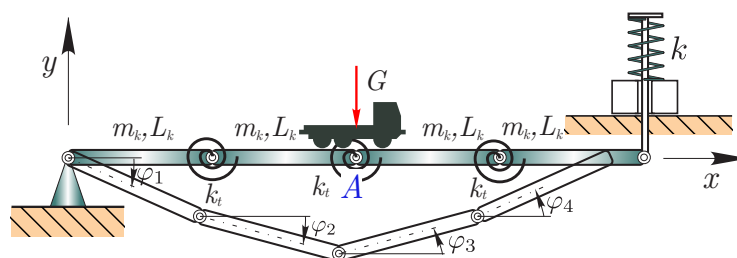


Naloga AnSt-03

Opazujete povos mostu dolžine L in mase m pri prečkanju tovornjaka teže G . Most modelirate kot nosilec z vztrajnostnim momentom I ter elastičnim modulom E . Nosilec poenostavite z $k = 4$ togimi elementi dolžine L_k in mase m_k , ki so med seboj povezani z rotacijskimi spoji ter rotacijsko vzmetjo togosti k_t . Vzmeti so v prikazni začetni legi v neobremenjenem stanju. Na desno strani je most preko vzmeti vpet na vodilo, ki omogoča premik mostu v horizontalni smeri. Pri reševanju predpostavite majhne zasuke.

Podatki:

$$\begin{aligned} m_k &= 250 \text{ kg} \\ L_k &= 0,75 \text{ m} \\ G &= 40000 \text{ N} \\ E &= 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa} \\ I &= 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \\ k &= 1 \cdot 10^7 \text{ N/m} \\ g &= 9.81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



1. Izračunajte togost rotacijske vzmeti če velja $k_t = \frac{E \cdot I}{L_i}$.
2. Določite število prostostnih stopenj sistema.
3. Zapišite izraze za posplošene sile z označenimi posplošenimi koordinatami.
4. Izračunajte povos f_{lasten} v točki A zaradi lastne teže mostu.
5. Izračunajte povos f_{skupen} v točki A zaradi lastne teže mostu in teže tovornjaka.
6. Izračunajte povos f_{lasten} v točki A zaradi lastne teže mostu, če izvedete diskretizacijo nosilca z $k = 10$ elementi.
7. Grafično prikažite povos mostu zaradi lastne teže pri diskretizaciji z $k = 4$ in $k = 10$ elementi.
8. Ekzakten izraz za izračun povosa nosilca zaradi lastne teže ima obliko $f_{\text{lasten}} = \frac{50 m L^3}{384 E I}$. Določite napako vaše aproksimacijske rešitve pri diskretizaciji z $k = 4$ in $k = 10$.

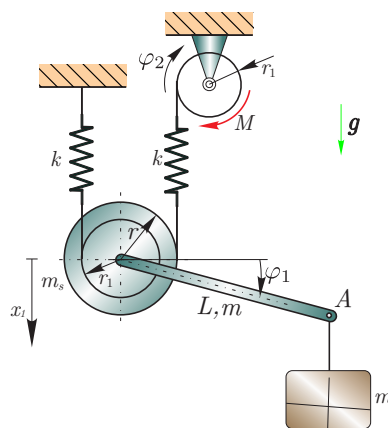
Naloga AnSt-04

Konstruirate dvigalo za dvigovanje občutljivih tovorov. Dvigalo je sestavljeno iz gibljivega škripca radija r in $r_1 = \frac{3}{4}r$ in mase m_s na katerega je privarjen nosilec mase m in dolžine L . Pletenica je na enem koncu toga vpeta na podlago na drugem koncu pa se navija na boben, ki je gnan s konstantnim moment M . Pletenico poenostavite z vzmetjo togosti k ter predpostavite, da so vzmeti v neobremenjenem stanju pri kotu $\varphi_1 = 0$ rad. Škripec se lahko giblje le v vertikalni smeri.

1. Določite število prostostnih stopenj sistema.
2. Zapišite izraze za posplošene sile z označenimi posplošenimi koordinatami.
3. Z uporabo metod analitične mehanike določite pomik x_1 ter zasuka φ_1 in φ_2 v statični ravnovesni legi.
4. Izračunajte povos sistema v točki A.
5. Grafično prikažite sistem v izračunani statični ravnovesni legi.

Podatki:

$$\begin{aligned}
 m_s &= 400 \text{ kg} \\
 L &= 3 \text{ m} \\
 r &= 0.5 \text{ m} \\
 m &= 10 \text{ kg} \\
 m_t &= 1000 \text{ kg} \\
 M &= 11000 \text{ Nm} \\
 k &= 50 \text{ kN/m} \\
 g &= 9.81 \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$



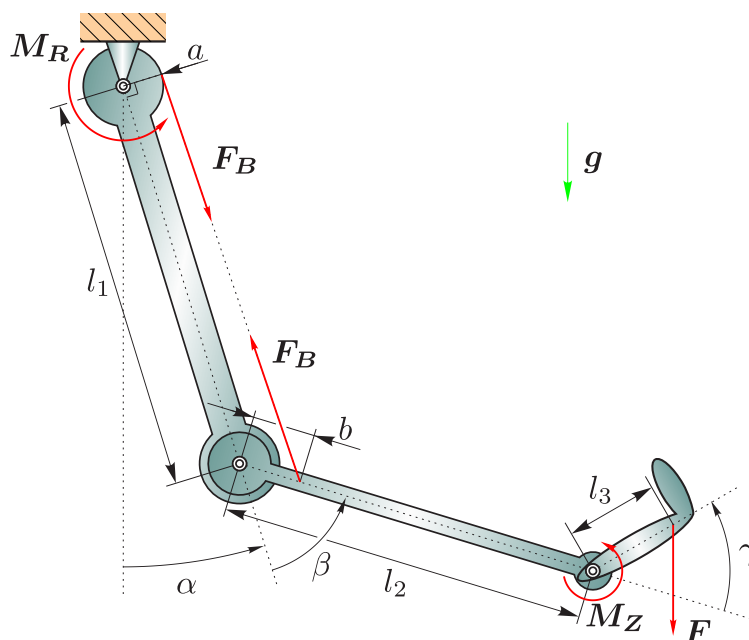
Naloga AnSt-05

Z bližanjem poletnih dni ste se včlanili v fitness klub. Najraje dvigujete uteži z eno roko za trening bicepsov. Ker vam tudi v fitnessu strojniška žilica ne da miru, vas zanima, kakšna je velikost sile F_B , s katero biceps deluje na narastišče pri dvigu uteži. Uporabite poenostavljen model na skici, kjer vpliv bicepsa upoštevate z dvema kolinearnima in nasprotujočima si silama F_B . Sile podlaktnih in ramenskih mišic nadomestite z momentom v zapestju M_Z in momentom v rami M_R . Silo teže uteži upoštevajte kot F ; maso roke zanemarite, saj ste šele začeli hoditi v fitness in še niste bistveno pridobili na mišični masi.

1. Koliko prostostnih stopenj ima sistem?
2. Z uporabo zakonov analitične statike izpeljite splošene sile sistema.
3. Z uporabo metod analitične statike določite sile in momente v položaju roke $\alpha = 10^\circ$, $b = 80^\circ$ in $\gamma = 0^\circ$.
4. Izračunajte potek sil in momentov pri počasnem dvigu uteži (predpostavite statično lego), če je sta kota $\alpha = 10^\circ$ in $\gamma = 0^\circ$ konstantna, kot β pa se spreminja od začetne lege pri 10° do končne lege pri 160° .
5. V katerem položaju je mišica bicepsa najbolj obremenjena in koliko? Primerjajte dobljene sile s kritičnimi obremenitvami mišičnega tkiva in ovrednotite vaše rezultate z razpoložljivimi viri.

Podatki:

$$\begin{aligned}l_1 &= 0,3 \text{ m} \\l_2 &= 0,28 \text{ m} \\l_3 &= 0,1 \text{ m} \\F &= 100 \text{ N} \\a &= 0,025 \text{ m} \\b &= 0,05 \text{ m}\end{aligned}$$



Naloga AnSt-06

Skonstruirali ste premično dvigalo za dvig težkih tovorov. Posebej ste bili inovativni pri konstrukciji mehanizma za dvigovanje roke dvigala. Dvigalo je sestavljeno iz dveh palic mase m in dolžine L , torzijske vzmeti k_t ter hidravličnega cilindra, ki skrbi za dvigovanje tovora. Vpetje hidravličnega cilindra ste skonstruirali, tako da je sila delovanja cilindra vedno v x -smeri. Ker je hidravlično olje v cilindru stisljivo le tega poenostavite z vzmetjo togosti k . Za potrebe testiranja dvigala ste na konec roke v točki A pripeli utež mase m_t . V začetni legi sistema pri kotu $\varphi_1 = \varphi_1^0$ in $\varphi_2 = \varphi_2^0$ sta tako hidravlični cylinder (togost k) kot tudi rotacijska vzmet togosti k_t v neobremenjenem stanju. Zanima vas povese dvigala v točki A .

Podatki:

$$m_t = 20 \text{ t}$$

$$m = 4 \text{ t}$$

$$L = 15 \text{ m}$$

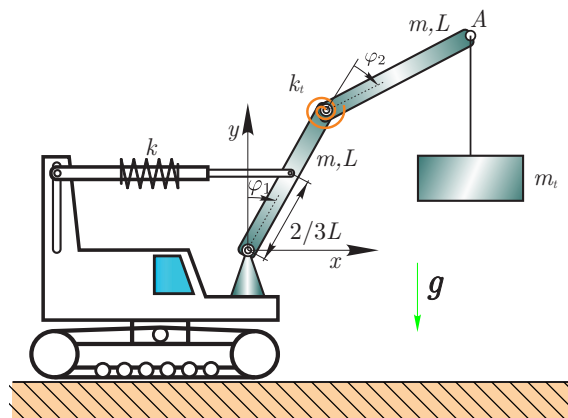
$$k = 2 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

$$k_t = 10 \cdot 10^6 \text{ Nm/rad}$$

$$\varphi_1^0 = 45^\circ$$

$$\varphi_2^0 = 0^\circ$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$



1. Določite število prostostnih stopenj sistema.
2. Zapišite izraze za posplošene sile z označenimi posplošenimi koordinatami.
3. Z uporabo metod analitične mehanike določite velikost zasuka φ_1 in φ_2 v statični ravnovesni legi.
4. Izračunajte povese sistema v točki A .
5. Grafično prikažite sistem v izračunani statični ravnovesni legi

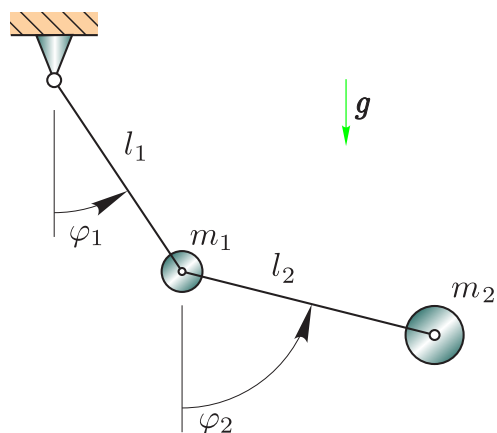
Naloga AnDn-01

Opazujete sistem dvojnega nihala, ki je sestavljeno iz dveh masnih točk m_1 in m_2 , ki sta povezani z brezmasnima palicama dolžin l_1 in l_2 , kot je prikazano na sliki. Dinamski sistem popišemo s posplošenima koordinatama φ_1 in φ_2 .

1. Z uporabo Lagrangeovih enačb II. vrste izpeljite sistem gibalnih enačb.
2. Enačbi zapišite v matrični obliki ter ločite $\ddot{\varphi}_1$ in $\ddot{\varphi}_2$.
3. Z uporabo numerične integracije izračunajte odziv sistema pri podanih začetnih pogojih. Numerično integracijo izvedite na časovnem intervalu $t \in [0, t_k]$ s.
4. Pomnožite začetni pogoj $\varphi_2(0)$ s faktorjem 1,001 ter opazujte nov odziv sistema. Izrišite potek posplošenih koordinat pri obeh odzivih ter komentirajte razliko.

Podatki:

$$\begin{aligned}m_1 &= 0,5 \text{ kg} \\m_2 &= 0,5 \text{ kg} \\l_1 &= 0,5 \text{ m} \\l_2 &= 0,5 \text{ m} \\\varphi_1(0) &= 3\pi/4 \text{ rad} \\\dot{\varphi}_1(0) &= 0 \text{ rad/s} \\\varphi_2(0) &= \pi/4 \text{ rad} \\\dot{\varphi}_2(0) &= 0 \text{ rad/s} \\t_k &= 20 \text{ s}\end{aligned}$$



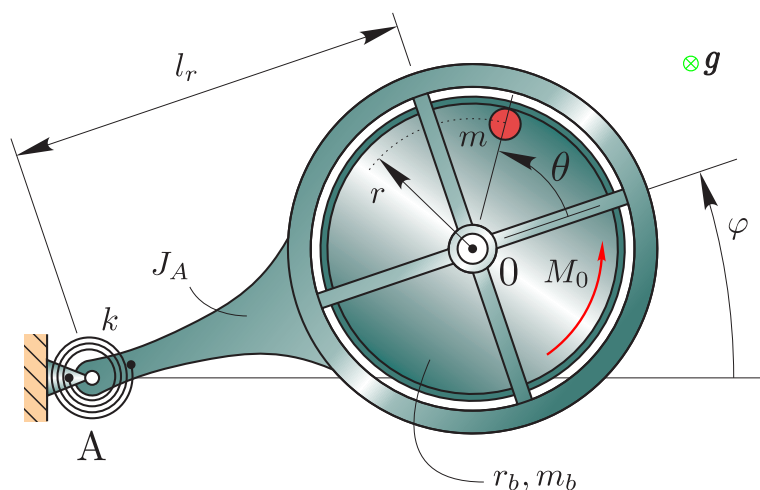
Naloga AnDn-02

Prijavili ste se na Gorenjev razpis za inovativne zasnove pralnega stroja. Vaša ideja je nov način vpetja bobna pri "top-loader" pralnem stroju, kot je shematsko prikazano na sliki. Perilo simulirate z masno točko m na radiju r , masni vztrajnostni moment bobna okrog točke 0 je $1/2 m_b r_b^2$, masni vztrajnostni moment pralne kadi glede na točko vpetja A je J_A . Da boste lažje prepričali Gorenjeve strokovnjake za dinamiko ste se odločili, da boste izdelali simulacijo zagona s konstantnim momentom M_0 . Predpostavite, da je masna točka m fiksno pritrjena na bobnen.

1. Z uporabo Lagrangeovih enačb II. vrste izpeljite sistem gibalnih enačb, pri tem pa upoštevajte konstanten pogonski moment M_0 , ki deluje na bobnen.
2. Enačbi zapišite v matrični obliki ter ločite $\ddot{\varphi}$ in $\ddot{\theta}$.
3. Z uporabo numerične integracije izračunajte odziv sistema pri podanih začetnih pogojih. Numerično integracijo izvedite na časovnem intervalu $t \in [0, t_k]$ s.
4. Togost vzmeti zmanjšajte na $k/10$ ter izračunajte odziv sistema na istem časovnem intervalu. Komentirajte odziv takega sistema iz vidika stabilnosti.

Podatki:

$$\begin{aligned}
 m &= 1,0 \text{ kg} \\
 r &= 0,3 \text{ m} \\
 m_b &= 0,2 \text{ kg} \\
 r_b &= 0,35 \text{ m} \\
 J_A &= 3,0 \text{ kgm}^2 \\
 l_r &= 0,5 \text{ m} \\
 k &= 100 \cdot 10^3 \text{ Nm/rad} \\
 M_0 &= 4,5 \text{ Nm} \\
 \varphi(0) &= 0 \text{ rad} \\
 \dot{\varphi}(0) &= 0 \text{ rad/s} \\
 \theta(0) &= 0 \text{ rad} \\
 \dot{\theta}(0) &= 0 \text{ rad/s} \\
 t_k &= 20 \text{ s}
 \end{aligned}$$



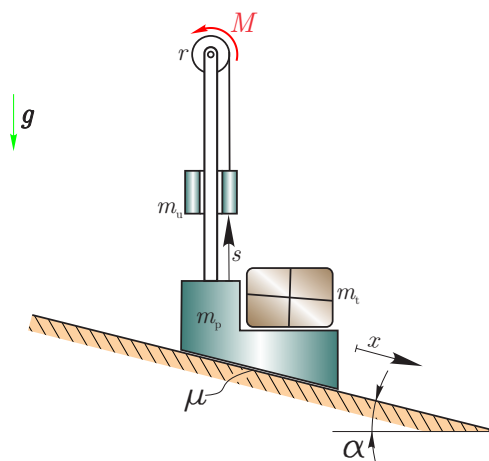
Naloga AnDn-03

Razvili ste napravo za spuščanje težkih tovorov po strmih terenih. Sistem je sestavljen iz platoja mase m_p s katerim spuščamo tovor mase m_t po klancu z naklonom α . Za uravnavanje hitrosti sistema skrbi mehanizem sestavljen iz mase m_u in vitla radija r , na katerega deluje moment M . Trenje med platojem in klancem je enako μ .

Namig: *Pospešek š mase m_u vpliva na velikost sile med platojem in klancem ter tako posredno na silo trenja.*

Podatki:

$$\begin{aligned} m_t &= 2800 \text{ kg} \\ m_p &= 200 \text{ kg} \\ r &= 1 \text{ m} \\ m_u &= 400 \text{ kg} \\ M &= 4150 \text{ Nm} \\ \alpha &= 10^\circ \\ \mu &= 0.35 \\ t_k &= 8 \text{ s} \\ v_0 &= 20 \text{ m/s} \\ g &= 9.81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



1. Določite število prostostnih stopenj sistema.
2. Z uporabo metod analitične mehanike zapišite z označenimi koordinatami gibalno/e enačbe sistema.
3. Izračunajte in grafično prikažite opravljeno pot platoja x v časovnem intervalu $t \in [0 \ t_k]$, če je začetna hitrost platoja $\dot{x} = v_0$, hitrost mase m_u pa $\dot{s} = 0$ m/s.
4. Kakšno pot x bi opravil plato, če bi na vitel delovali z momentom $M = 0$ Nm.

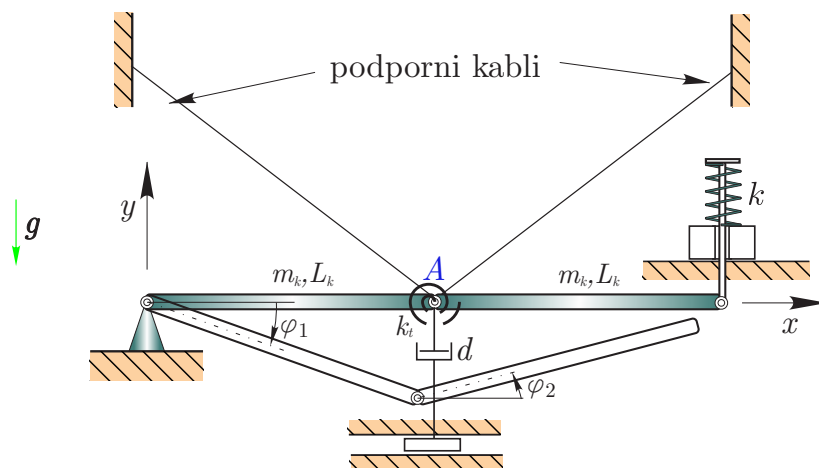
Naloga AnDn-04

Opazujete gibanje mostu dolžine L in mase m pri odstranitvi podpornih kablov, ki so bili potrebni tekom gradnje. Most modelirate kot nosilec z vztrajnostnim momentom I ter elastičnim modulom E . Nosilec poenostavite z $k = 2$ palicama dolžine L_k in mase m_k , ki so med seboj povezani z rotacijskim spojem ter rotacijsko vzmetjo togosti k_t . Vzmeti so v prikazani začetni legi v neobremenjenem stanju. Disipacijo energije mostu zagotavlja dušilka s faktorjem dušenja d , ki je vpeta na most v točki A . Na desni stran je most preko vzmeti vpet na vodilo, ki omogoča premik mostu horizontalni smeri. Predpostavite majhne zasuke.

Namig: *Most pri hipni odstranitvi kablov miruje in se začne gibati zaradi lastne teže*

Podatki:

$$\begin{aligned} m_k &= 750 \text{ kg} \\ L_k &= 1,5 \text{ m} \\ d &= 500 \text{ Ns/m} \\ E &= 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa} \\ I &= 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \\ k &= 1 \cdot 10^7 \text{ N/m} \\ g &= 9.81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



1. Izračunajte togost rotacijske vzmeti če velja $k_t = \frac{E \cdot I}{L_k}$.
2. Določite število prostostnih stopenj sistema.
3. Z uporabo metod analitične dinamike zapišite sistem/e gibalnih enačb.
4. Izračunajte in grafično prikažite gibanje mostu v točki A (x in y -smer) v časovnem intervalu $t \in [0 \quad 5]$ s.
5. Izračunajte in grafično prikažite gibanje celotnega mostu v časovnem intervalu $t \in [0 \quad 5]$ s.
6. *Neobvezno reševanje, vzemite to kot izziv:* Izračunajte in grafično prikažite gibanje mostu v časovnem intervalu $t \in [0 \quad 5]$ s, če izvedete diskretizacijo nosilca s $k = 6$ palicami.

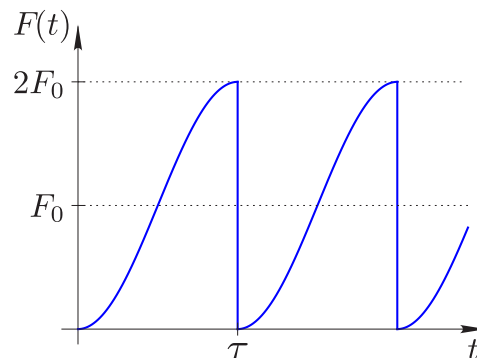
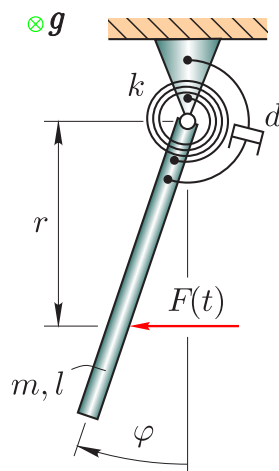
Naloga PerVzb-01

V podjetju, kjer ste zaposleni, ste dobili projekt izdelave “Kolesa sreče”. Vam je bila dodeljena naloga, da analizirate nihanje jezička pri vrtenju kolesa sreče s konstantno hitrostjo. S silomerom ste izmerili periodično silo na jeziček, ki vedno prijemlje na konstantni ročici r glede na vpetje jezička. Izmerjena sila je pol-kosinusne oblike, kot je prikazana na sliki. Jeziček obravnavajte tako, kot je prikazano na sliki.

1. Glede na graf izmerjene sile določite funkcijo $F(t)$ pri časovnem intervalu $t \in [0, \tau]$.
2. Določite izraze za koeficiente a_0, a_j in b_j za določeno periodično silo $F(t)$ (matematična izpeljava koeficientov naj bo prikazana v poročilu).
3. Izračunajte Fourierjevo vrsto za silo $F(t)$ s tolikšnim številom členov, da bo časovnem intervalu $[0, \tau)$ napaka aproksimacije manjša od $0,005 \cdot F_0$. Uporabite časovni korak $dt = \tau/N$. Napako izračunajte po $erf(N) = \sum_{i=0}^N |F_{\text{approx}}(t_i) - F(t_i)| dt$, pri čemer je $t_i = i \cdot dt$.
4. Izračunajte odziv jezička pri podanem periodičnem vzbujanju. Vzbujevalno silo aproksimirajte s Fourierjevo vrsto, izračunano v prejšnjem vprašanju.

Podatki:

$$\begin{aligned}
 F_0 &= 4 \text{ N} \\
 \tau &= 2 \text{ s} \\
 m &= 0,05 \text{ kg} \\
 l &= 0,05 \text{ m} \\
 r &= 2/3l \\
 k &= 0,5 \text{ Nm/rad} \\
 d &= 0,0002 \text{ Nms/rad} \\
 N &= 20000
 \end{aligned}$$



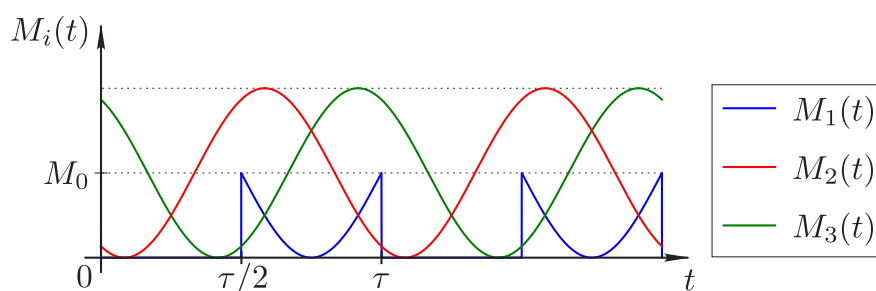
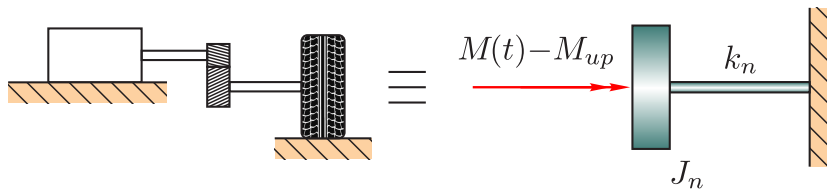
Naloga PerVzb-02

Prijavili ste se na razpis za zaposlitev v podjetju Tesla Motors, od katerega ste dobili preizkusno nalogo. Tesla Roadster je gnan s štiripolnim trofaznim indukcijskim elektromotorjem. Vaša naloga je, da izračunate, kakšne torzijske vibracije pogonskega sklopa povzroči izpad prve faze, ko le-ta doseže srednjo vrednost $M_1(t) = M_0$ (glejte graf na sliki). Privzemite, da se motor vrti s konstantno hitrostjo n ter da se momenti faz linearno seštevajo $M(t) = \sum_i M_i(t)$. Za dinamski model pogonskega sklopa uporabite poenostavljen model z eno prostostno stopnjo (slika), kjer sta k_n in J_n nadomestna togost in masni vztrajnostni moment, razmernik dušenja δ pa je že eksperimentalno določen.

1. Izpeljite enačbi za $M(t)$ na intervalih $[0, \tau/2]$ in $[\tau/2, \tau]$. Glede na privzeto hitrost vrtenja in število polov motorja izračunajte dolžino osnovne periode τ .
2. Določite izraze za koeficiente a_0, a_j in b_j za periodičen moment $M(t)$.
3. Izračunajte Fourierjevo vrsto z N členi za moment $M(t)$ ter izrišite primerjavo med dejanskim in aproksimiranim momentom.
4. Izračunajte odziv $\varphi(t)$ pogonskega sklopa. Privzemite, da je moment upora M_{up} konstanten in enak statični komponenti pogonskega momenta M . Na istem grafu izrišite moment vzbujanja ter izračunan odziv sistema. Komentirajte rezultate.
5. Ali bi s povečanjem razmernika dušenja δ zmanjšali amplitudo torzijskih nihanj? Vaš odgovor utemeljite z ustrežno teorijo. Kateri ukrep (poleg preprečitve izpada faze) bi bistveno zmanjšal amplitudo torzijskih nihanj?

Podatki:

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 100 \text{ Nm} \\
 n &= 4500 \text{ obr/min} \\
 k_n &= 50 \text{ kNm/rad} \\
 J_n &= 0,1 \text{ kgm}^2 \\
 \delta &= 0,2 \\
 N &= 100
 \end{aligned}$$



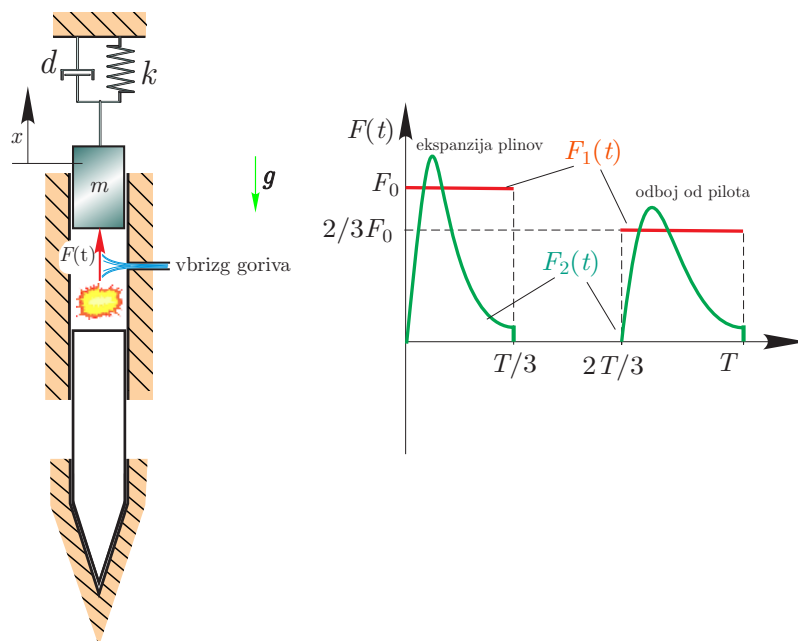
Naloga PerVzb-03

Na Ljubljanskem barju ste poceni kupili zemljišče za gradnjo svoje hiše. Zemljišče morate pred gradnjo utrditi s pomočjo pilotov, ki jih boste zabili v mehko ilovico do trdne podlage. Ker ste na tesnem z denarjem, ste sami skonstruirali napravo za zabijanje pilotov, ki je prikazana na sliki. Za dvigovanje uteži mase m uprabljate silo ekspanzije plinov pri eksploziji goriva, ki ga predhodno vbrizgate v prazen prostor med maso in pilotom (podoben princip delovanja kot batni motor). Utež se v fazi ekspanzije dviguje, nato pa trči v pilot ter se od njega odbije. Potek sile $F(t)$ je prikazan na grafu.

Namig: *Pomik pilota v x-smeri zanemarite*

Podatki:

$$\begin{aligned} m &= 500 \text{ kg} \\ k &= 20000 \text{ N/m} \\ d &= 5000 \text{ Ns/m} \\ F_0 &= 2000 \text{ N} \\ T &= 6 \text{ s} \\ g &= 9.81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



1. Zapišite potek sile $F_1(t)$ v obliki Fourierove vrste z $N = 5, 10, 40$ in 400 členi.
2. Določite odziv sistema x v ustaljenem stanju, če pri zapisu sile $F_1(t)$ uporabite $N = 5, 10, 40$ in 400 členov Fourierove vrste.
3. V nekem trenutku ste ugotovili, da je potek sile $F_1(t)$ preveč poenostavljen, zato ste naročili meritev sile, ki jo je izvedel laboratorij LADISK. Izmerjen potek sile $F_2(t)$ ima obliko:

$$F_2(t) = A \sin(0.2 \pi t) \cdot e^{-2t},$$

pri čemer je amplituda A v fazi ekspanzije plina enaka $A = 12 F_0$ ter pri odboju od pilota $A = 8 F_0$. Z uporabo numerične integracije (npr. trapezna metoda) izračunajte koeficiente Fourierove vrste a_i in b_i ter zapišite potek sile $F_2(t)$ v obliki Fourierove vrste z $N = 5, 10, 40$ in 400 členi.

4. Določite odziv sistema x v ustaljenem stanju, če pri zapisu sile $F_2(t)$ uporabite $N = 5, 10, 40$ in 400 členov Fourierove vrste.
5. Primerjajte odziva dobljena pri obeh silah $F_1(t)$ in $F_2(t)$ ter komentirajte rezultate.

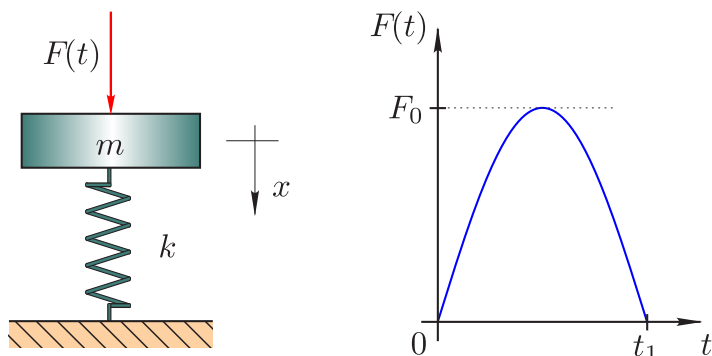
Naloga ImpVzb-01

Opazujete enostaven nedušen dinamski sistem z eno prostostno stopnjo, kot je prikazan na sliki. Zanima vas odziv tega sistema na impulzno motnjo sile $F(t)$ pol-sinusne oblike, kot je prikazana na grafu. Dolžina impulza je definirana s konstanto t_1 .

1. Določite lastno frekvenco ω_0 in nihajni čas t_0 sistema.
2. Glede na graf sile določite funkcijo $F(t)$.
3. Izpeljite enačbo odziva sistema na časovnem intervalu $t \in [0, t_1]$.
4. Izpeljite enačbo odziva sistema na časovnem intervalu $t \in [t_1, \infty)$.
5. Na časovnem intervalu $t \in [0, t_1 + 3 \cdot t_0]$ izrišite odziv sistema, ki je normiran s statičnim pomikom (F_0/k). Dolžino impulza t_1 izračunajte za tri razmerja $r = t_1/t_0 = 0.1, 0.8$ in 3.0 . Na vsakega od treh grafov tudi dodajte normiran impulz vzbujanja $F(t)/F_0$.
6. Numerično izračunajte največje pomike normiranega odziva $|xk/F_0|_{\max}$ v odvisnosti od razmerja $r = t_1/t_0$. Izrišite ustrezen graf za območje $r \in [0, 10]$. Komentirajte, kaj ste izrisali.

Podatki:

$$\begin{aligned} m &= 20 \text{ kg} \\ k &= 1000 \text{ N/m} \end{aligned}$$



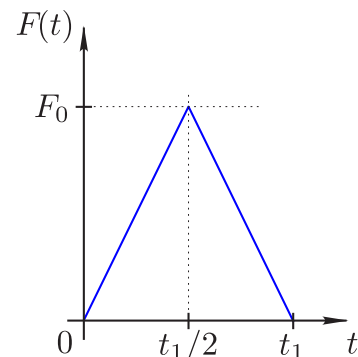
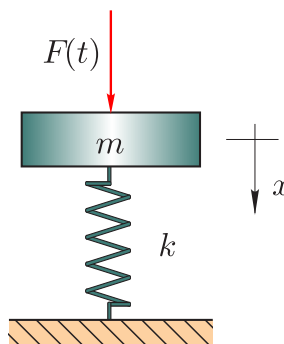
Naloga ImpVzb-02

Podjetje Unior Kovaška industrija d.d. iz Zreč se je na vas obrnilo z naslednjim problemom. Pri kovanju ključev velikosti 19 in več je največja sila kovanja F_0 enaka največji dovoljeni sili, ki jo s strojem lahko dosežemo. Zaradi udarne sile kladiwa, ki s silo $F(t)$ udarja v nakovalo mase m , prihaja do prekomernih nihanj nakovala, ki bistveno znižajo kvaliteto izdelanih ključev. Uniorjevi inženirji sumijo, da je bistven problem v premehkih vzmeteh s skupno togostjo k , na katere je postavljeno nakovalo. Od vas želijo, da preučite problem ter določite minimalno togost vzmeti, s katero bi znižali največji pomik nakovala x_{\max} pod 1 mm. Da ste z vašimi izračuni na varni strani, obravnavajte nakovalo kot nedušen sistem.

1. Glede na graf sile določite funkcijo $F(t)$.
2. Izračunajte odziv sistema na časovnem intervalu $t \in [0, t_1/2]$.
3. Izračunajte odziv sistema na časovnem intervalu $t \in [t_1/2, t_1]$.
4. Izračunajte odziv sistema na časovnem intervalu $t \in [t_1, \infty)$.
5. Numerično izračunajte največji pomik v odvisnosti od togosti vzmeti k . Podajte strokovno mnenje glede vpliva togosti podpor na odziv sistema ter predlagajte ustrezne ukrepe.

Podatki:

$$\begin{aligned}m &= 4000 \text{ kg} \\t_1 &= 0.01 \text{ s} \\F_0 &= 30 \text{ kN} \\x_{\max} &< 1 \text{ mm}\end{aligned}$$



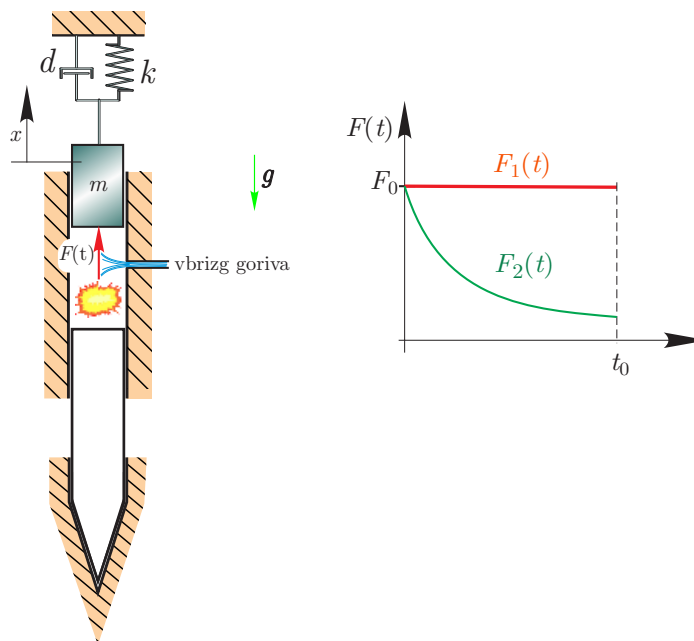
Naloga ImpVzb-03

Na Ljubljanskem barju ste poceni kupili zemljišče za gradnjo svoje hiše. Zemljišče morate pred gradnjo utrditi s pomočjo pilotov, ki jih boste zabili v mehko ilovico do trdne podlage. Ker ste na tesnem z denarjem, ste sami skonstruirali napravo za zabijanje pilotov, ki je prikazana na sliki. Za dvigovanje uteži mase m uprabljate silo ekspanzije plinov pri eksploziji goriva, ki ga predhodno vbrizgate v prazen prostor med maso in pilotom (podoben princip delovanja kot batni motor). Ker gre še za nepreizkušen koncept vam zaradi prevelike količine vbrizganega goriva občasno prihaja do nepredvidenih močnih eksplozij, zaradi katere na maso m deluje sila $F(t)$.

Namig: *Pomik pilota v x -smeri zanemarite*

Podatki:

$$\begin{aligned} m &= 500 \text{ kg} \\ k &= 20000 \text{ N/m} \\ d &= 500 \text{ Ns/m} \\ F_0 &= 2000 \text{ N} \\ t_0 &= 2 \text{ s} \\ g &= 9.81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



1. Določite lastno nedušeno in dušeno krožno frekvenco sistema.
2. Če na sistem deluje sila $F_1(t)$ potem določite odziv x_1 v časovnem intervalu $t \in (0, t_0)$ in x_2 v časovnem intervalu $t \in (t_0, 4t_0)$. Prikažite celoten potek analitične integracije (brez uporabe matematičnih programskih paketov).
3. Grafično prikažite odziv sistema zaradi sile $F_1(t)$.
4. V nekem trenutku ste ugotovili, da potek sile $F_1(t)$ najverjetneje ni pravilen, zato ste naročili meritev sile, ki so jo izvedli cenjeni strokovnjaki laboratorija LADISK. Izmerjeni potek sile $F_2(t)$ ima obliko:

$$F_2(t) = F_0 \cdot e^{-t/t_0}$$

Če na sistem deluje sila $F_2(t)$ potem določite odziv x_1 v časovnem intervalu $t \in (0, t_0)$ in x_2 v časovnem intervalu $t \in (t_0, 4t_0)$. Integral lahko rešite z uporabo matematičnih programskih paketov ter podate samo končen rezultat.

5. Grafično prikažite odziv sistema zaradi sile $F_2(t)$.
6. Primerjajte odziva dobljena pri obeh silah $F_1(t)$ in $F_2(t)$ ter komentirajte rezultate.

Naloga SisVPS-01

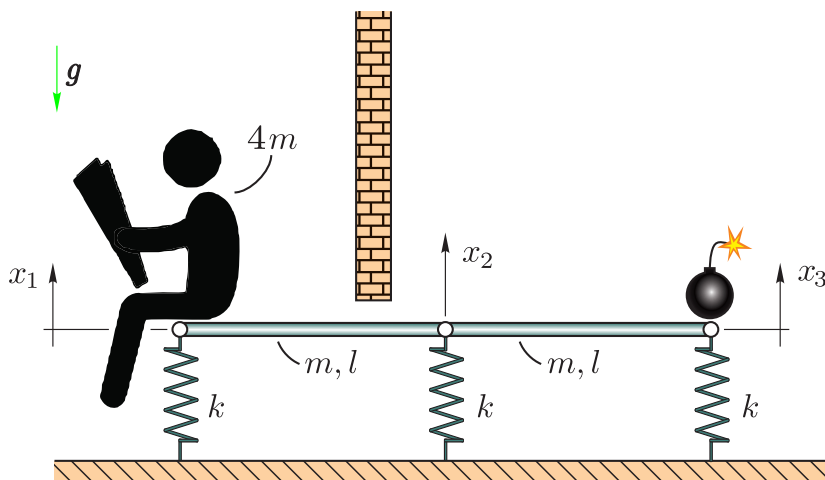
Vaše zaupanje v moč dinamike sistemov, lastnih frekvenc in podobnih zadev vas je privedlo do tega, da ste s kolegi iz družboslovnih študij stavili, da lahko vi varno sedite na eni strani ustrezno skonstruiranega dinamskega sistema, medtem ko na drugi strani eksplodira bomba. Dinamski sistem, ki se vam zdi najustreznejši, je prikazan na sliki. Bolj kot se približuje čas preizkusa, bolj nelagodno vam postaja, zato ste se odločili okvirno preračunati, kakšen bo odziv sistema pri neki predpostavljeni sili eksplozije.

Silo eksplozije privzemite kot pol-sinusni val dolžine t_0 in amplitude F_0 . Pri računanju uporabite časovno diskretizacijo $dt = t_0/100$.

1. Najprej obravnavajte sistem, ko nihče ne sedi na levem robu. Izračunajte lastne frekvence in matriko lastnih vrednosti.
2. Za isti sistem vpeljite v matriko gibalnih enačb vektor glavnih koordinat $\boldsymbol{\eta}(t)$ ter izračunajte generalizirano masno in togostno matriko.
3. Veste, da je sistem blago dušen; to v preračunu upoštevajte s privzetim razmernikom dušenja $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta$. Z uporabo konvolucijskega integrala (lahko uporabite vgrajene numerične funkcije) izračunajte odziv glavnih koordinat $\boldsymbol{\eta}(t)$ ter odziv prostorskih koordinat $\mathbf{x}(t)$ na časovnem intervalu $t \in [0, 20\text{s}]$. Kako kaže vaši stavi glede na te rezultate?
4. Ponovite postopek za dinamski sistem z vami na levi strani. Vašo maso zaokrožite na $4m$. Kakšen je odziv sistema sedaj? Primerjajte odzive med posameznimi prostostnimi stopnjami ter odzive med sistemom z vami in brez vas. Ustrezno komentirajte rezultate. Ali bi se vam na dan preizkusa izplačalo napolniti žepe s kamni?
5. Razširitev naloge po lastni ideji (npr. lahko analizirate, kako bi izolirali silo eksplozije, če bi ob isti masi in skupni togosti imel sistem 10 členov namesto samo dveh).

Podatki:

$$\begin{aligned}
 F_0 &= 5 \text{ kN} \\
 t_0 &= 0,01 \text{ s} \\
 m &= 20 \text{ kg} \\
 l &= 1 \text{ m} \\
 k &= 2 \text{ kN/m} \\
 \delta &= 0,01
 \end{aligned}$$



Naloga SisVps-03

Kot študent delate prakso v podjetju Gorenje. V podjetju želijo vpostaviti lastno proizvodnjo betonskih uteži, ki so nameščene na kad pralnega stroja. Ker na tem področju nimajo izkušenj so vas poslali v konkurenčno podjetje pogledat njihovo proizvodnjo. Na ogledu ste ugotovili, da kolupe v katere je vlit beton vibrirajo na nosilcu dolžine L in mase m , ki je členkasto vpet na obeh koncih. Vzbujanje sistema zagotavljajo trije elektromotorji z ekscentrično vpeto maso.

Podatki:

$$m = 253 \text{ kg}$$

$$L = 7 \text{ m}$$

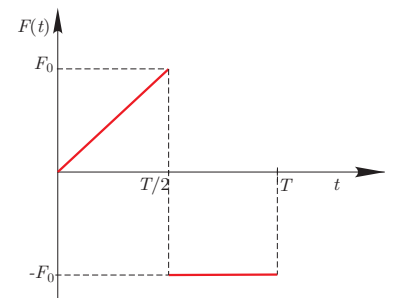
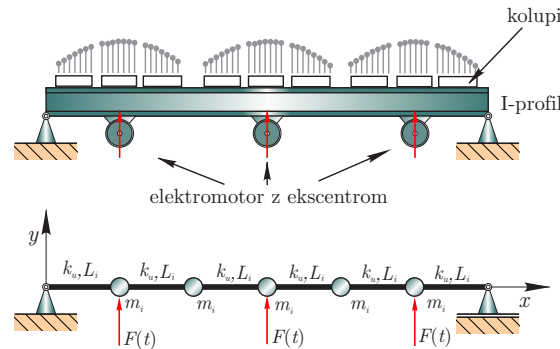
$$E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

$$I = 4.25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$A = 0.0046 \text{ m}^2$$

$$F_0 = 300 \text{ N}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$



- Če zaradi vibracij nosilca škropljenje cementnega mleka ustvari vzorec, kot je prikazano na sliki potem ugotovite v bližini katere izmed lastnih frekvenc f_{obrat} obratuje sistem.
- Nosilec diskretizirajte na $N = 6$ segmentov, pri čemer maso segmenta označite z m_i dolžino segmenta pa z L_i . Če nadomestno togost segmenta podaja izraz:

$$k_u = 1.61 \frac{EI}{(2L_i)^3} \left(\frac{L}{N} \right)^2$$

potem z uporabo metode vplivnih togostnih koeficientov zapišite gibalne enačbe sistema.

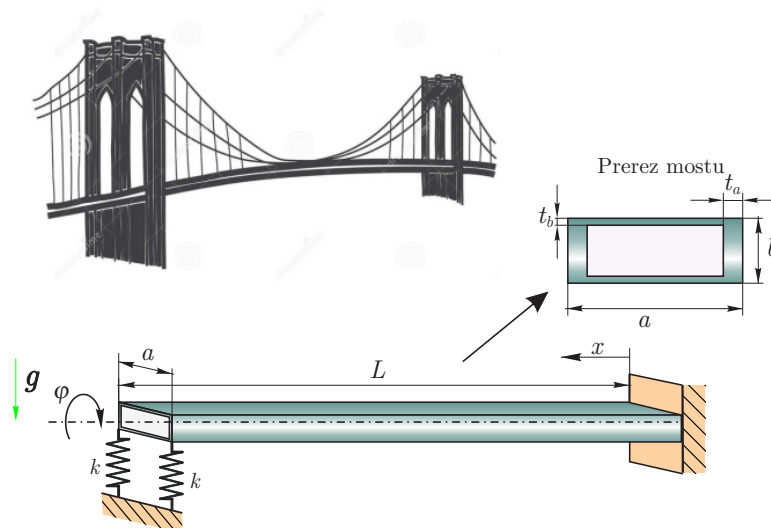
- Določite vse lastne frekvence in vektorja sistema ter grafično prikažite lastne oblike nosilca.
- Izvedite prehod v modalne koordinate in zapišite nevezan sistem gibalnih enačb.
- Določite frekvenco vzbujanja elektromotorjev ω ter s tem periodo T , če mora sistem obratovati 20% nad f_{obrat} lastno frekvenco.
- Izračunajte odziv sistema v ustaljenem stanju zaradi delovanja sile $F(t)$.
- Grafično prikažite odziv sistema
- Določite lastne frekvence sistema pri diskretizaciji nosilca z $N = 6, 24, 60, 120, 600$ segmenti ter prikažite graf konvergence.
- Po lastni presoji razširite nalogo in podajte rešitve.

Naloga ZvezSist-01

Sodelujete pri izdelavi prvega visečega mostu v Sloveniji preko reke Save. Izvajalci so tekom gradnje ugotovili, da prva lastna torzijska frekvenca mostu sovpada s frekvenco vzbujanja vetra f_{vetra} . Ker se konstruktorji želijo izogniti usodi mostu Tacoma Narrows, so vas prosili, da predlagate rešitev, s katero bo moč lastno frekvenco mostu znižati za 30% glede na frekvenco vetra f_{vetra} . Na podlagi izkušenj, ki ste jih pridobili pri reševanju domačih nalog iz Višje Dinamike, ste predlagali rešitev, ki na levi strani mostu predvideva alternativno podprtje z dvema vzmetema.

Podatki:

$$\begin{aligned}
 L &= 20 \text{ m} \\
 a &= 16 \text{ m} \\
 b &= 4 \text{ m} \\
 t_a &= 0.3 \text{ m} \\
 t_b &= 0.1 \text{ m} \\
 E &= 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \\
 \mu &= 0.3 \\
 \rho &= 7850 \text{ kg/m}^3 \\
 f_{vetra} &= \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{G I_t L}{J}} \\
 g &= 9.81 \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$



1. Izračunajte vzvojni vztrajnostni moment prereza mostu, če je le ta podan z izrazom:

$$I_t = \frac{4 A^2}{2 a/t_b + 2 b/t_a},$$

kjer je A površina preseka mostu.

2. Zapišite vodilno enačbo problema ter definirajte robne pogoje.
3. Izračunajte strižni modul, če je le ta podan z izrazom:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

4. Določite togost vzmeti k , tako da bo prva lastna torzijska frekvenca mostu za 30% nižja od frekvence vzbujanja vetra f_{vetra} .
5. Nalogo po lastni presoji razširite

Naloga ZvezSist-02

Po napornem študiju ste se podali na kratek poletni oddih na slovensko obalo. Pri brezskrbnem ležanju opazujete skakalca, ki se pripravlja na skok v vodo. Ker se želite izkazati pred vašimi kolegi boste na osnovi enostavnega analitičnega modela ocenili lastne frekvence sistema. Desko modelirate kot nosilec z elastičnim modulom E , gostoto ρ ter širino a in višino b .
Namig: Maso skakalca ne upoštevajte pri izračunu lastne krožne frekvence!

Podatki:

$$L = 2 \text{ m}$$

$$a = 0.5 \text{ m}$$

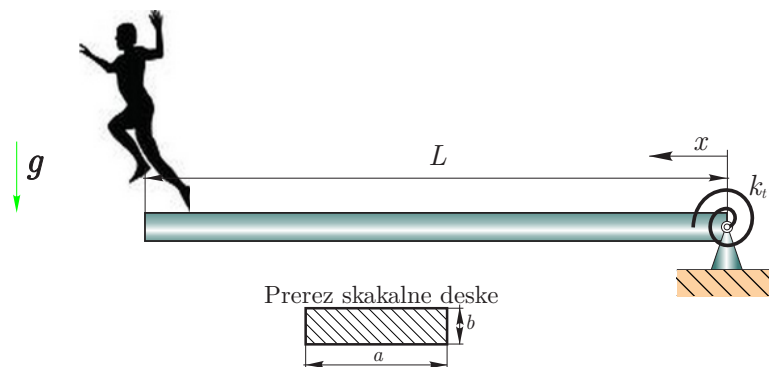
$$b = 0.05 \text{ m}$$

$$E = 1 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$$

$$k_t = 3 \cdot 10^4 \text{ Nm/rad}$$

$$\rho = 1250 \text{ kg/m}^3$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$



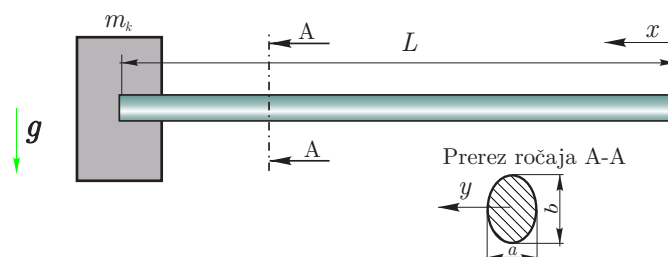
1. Izračunajte vztrajnostni moment prereza mostu.
2. Zapišite vodilno enačbo problema ter definirajte robne pogoje.
3. Določite prve štiri lastne frekvence sistema.
4. Nalogo po lastni presoji razširite.

Naloga ZvezSist-03

Z inšpektorata za okolje in prostor ste dobili odločbo, ki vam narekuje, da morate porušiti nelegalno zgrajeno betonsko ograjo. V ta namen ste kupili veliko macolo z lesenim ročajem, s katero se boste lotili rušenja. Na leseni ročaj dolžine L , gostote ρ ter elastičnega modula E je na koncu pritrjena macola z maso m_k . Macolo modelirate kot masno točko.

Podatki:

$$\begin{aligned}L &= 1 \text{ m} \\a &= 0.04 \text{ m} \\b &= 0.03 \text{ m} \\m_k &= 5 \text{ kg} \\E &= 1 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \\ \rho &= 900 \text{ kg/m}^3 \\g &= 9.81 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$



1. Izračunajte vztrajnostni moment prereza lesenega ročaja okoli osi y .
2. Zapišite vodilno enačbo problema ter definirajte robne pogoje.
3. Določite prve štiri lastne frekvence sistema.
4. Ker v trgovini nudijo macole z različnimi masami vas zanima, kako le ta vpliva na lastno frekvenco sistema. Grafično prikažite potek prve lastne frekvence v odvisnosti od mase macole $m_k \in [0 \ 10][\text{kg}]$.
5. Nalogo razširite po lastni presoji.